A N A L I Z A F U N K C J O N A L N A Z T O P O L O G I Ą

WPPT 4r., sem. letni
EGZAMIN NA OCENĘ CELUJĄCĄ

Wrocław, 20 czerwca 2013

ZADANIE 1. Wydedukować, że na przestrzeni rzeczywistej ℓ^∞ istnieje funkcjonał P o własnościach

1. $\liminf_n x_n \leqslant P(x) \leqslant \limsup_n x_n$,
2. $P(x) = P(\sigma x)$,

gdzie $x = (x_n)_{n\geqslant 1}$, $\sigma x = (x_{n+1})_{n\geqslant 1}$.

Wskazówka: Korzystając z pełnej wersji tw. Hahna–Banacha próbuj przedłużyć (z odpowiedniej podprzestrzeni) funkcjonał $P_0(x) = \lim_n \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k$. Zauważ, że analogiczna granica górna jest określona na całym ℓ^∞.

ROZWIĄZANIE: Niech c będzie podprzestrzenią ciągów zbieżnych. Jest to podprzestrzeń domknięta w ℓ^∞. Na niej mamy funkcjonał ograniczony $P_0(x) = \lim_n x_n = \lim_n \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k$ (o normie 1, co łatwo widać). Natomiast na całej przestrzeni określone są dwa funkcjonały podliniowe $p(x) = \limsup_n \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k$ oraz $q(x) = \limsup_n x_n$. Ich podliniowość sprawdza się elementarnie. (Uwaga! nie ma jednorodności dla stałych ujemnych, bo wtedy lim sup zamienia się na lim inf). Oczywiście $p \leqslant q$ na całości, natomiast na c mamy $P_0 \leqslant p \leqslant q$. Teraz stosujemy pełną wersję twierdzenia H–B z funkcjonałem podliniowym p i otrzymujemy określony na ℓ^∞ funkcjonał liniowy $P \leqslant p$ (nawet nie jest ważne, że jest on przedłużeniem P_0). Mamy teraz $P \leqslant q$, czyli $P(x) \leqslant \limsup_n x_n$ oraz $-P \geqslant -q$, co po podstawieniu $-x$ w miejsce x daje $P(x) \geqslant -q(-x) = \liminf x_n$. Zatem P spełnia warunek 1 z zadania.

Pozostaje do sprawdzenia niezmienniczość na przesunięcie σ. W tym celu piszemy

$$P(x) - P(\sigma x) = P(x - \sigma x) \leqslant p(x - \sigma x) = \limsup \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{n+1}) =$$
$$\limsup \frac{1}{n}(x_1 - x_{k+1}) \leqslant \limsup \frac{1}{n} 2\|x\|_\infty = 0$$

Podobnie pokazujemy, że $P(\sigma x) - P(x) \leqslant 0$, co razem daje $|P(x) - P(\sigma x)| \leqslant 0$, czyli 2.

UWAGA: W tym zadaniu widać przewagę pełnej wersji tw. H–B nad wersją z normą. Funkcjonał podliniowy p **nie jest nieujemny** (tak jak norma), dlatego daje on też informację o tym, że P jest **więszy lub równy** od czegoś sensownego, co może bywać dodatnie (a nie tylko od minus normy).

ZADANIE 2. Na przestrzeni Hilberta $L^2(\lambda)$, gdzie λ jest miarą Lebesgue'a na okręgu jednostkowym $\mathbb{T}$ rozważmy operator $Tf(z) = f(z^2)$.

(a) Sprawdź, że jest to operator unitarny.

(b) Znajdź miarę spektralną μ_k elementu bazy $f_k(z) = z^k$ dla $k \neq 0$ (przypomnijmy – chodzi o taką miarę na okręgu, żeby jej ciąg współczynników Fouriera–Stieltjesa $\hat{\mu}_k(n)$ zgadzał się z ciągiem $< T^n f_k, f_k >$).

ROZWIĄZANIE: Można przyjąć, że λ jest *unormowaną* miarą Lebesgue'a (nie ma to znaczenia, ale ułatwia rachunki). Dla dowolnej $f \in L^2(\lambda)$ mamy $Tf(z) = Tf(-z)$ (bo $z^2 = (-z)^2$), zatem w obrazie T są tylko funkcje parzyste. Zatem T nie jest „na" i nie może być unitarny (pytanie było podchwytliwe, ale większość wyczuła haczyk). Natomiast pozostaje faktem, że T zachowuje iloczyn skalarny (a więc i normę), bowiem

$$\langle Tf, Tg\rangle = \int_{\mathbb{T}} f(z^2)\bar{g}(z^2)\,d\lambda(z) = 2\int_{\bar{\mathbb{T}}} f(z^2)\bar{g}(z^2)\,d\lambda(z),$$

gdzie $\bar{\mathbb{T}}$ oznacza górny półokrąg. Dalej robimy podstawienie $z^2 = y$, wtedy y przebiega cały okrąg (gdy z przebiega górną połówkę) oraz $d\lambda(y) = 2d\lambda(z)$ (czyli $d\lambda(z) = \frac{1}{2}d\lambda(y)$)[1]. Dwójka się skróci i dostaniemy iloczyn skalarny $\langle f, g\rangle$.

Teraz dla funkcji $f_k(z) = z^k$ ($k \neq 0$) mamy (niestety tylko dla $n \geqslant 0$),

$$\langle T^n f_k, f_k\rangle = \int_{\mathbb{T}} z^{2^n k} z^{-k}\,d\lambda(z) = \int_{\mathbb{T}} z^{(2^n-1)k}\,d\lambda(z) = 0,$$

za wyjątkiem przypadku $n = 0$, dla którego całka wynosi 1. Zatem otrzymaliśmy ciąg $(1, 0, 0, \dots)$, który zgadza się z ciągiem (nieujemną częścią, tzn., dla $n \geqslant 0$) ciągu współczynników F–S miary Lebesgue'a. Faktycznie, dla miary Lebesgue'a mamy

$$\hat{\lambda}(n) = \int_{\mathbb{T}} z^n\,d\lambda(z) = 0,$$

za wyjątkiem $n = 0$, dla którego całka wynosi 1. Ponieważ wspólczynniki F–S miary probabilistycznej dla n ujemnych są antysymetryczne do współczynników dodatnich, zgodność naszego ciągu $\langle T^n f_k, f_k\rangle$ z $\hat{\lambda}(n)$ dla $n \geqslant 0$ wystarczy, aby jednoznacznie zdeterminować miarę μ_k jako λ.

UWAGA: Dla $k = 0$ oczywiście wyjdzie $\langle T^n f_k, f_k\rangle = 1$ dla wszystkich $n \geqslant 0$, co odpowiada mierze atomowej δ_1 skupionej w punkcie 1 na okręgu.

[1] Wyjaśnienie. To nie jest całkowanie względem zmiennej zespolonej, dlatego nie mamy $dy = 2zdz$, tylko patrzymy na to jak na $z = e^{2\pi i t}$ (oraz $d\lambda(z) = dt$). Wtedy podstawienie $z^2 = y$ odpowiada podstawieniu $2t = s$, co daje $2dt = ds$, czyli $2d\lambda(z) = d\lambda(y)$.